



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

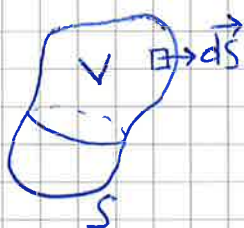
EM II - Notes

I) Rapports d'analyse vectorielle

< Voir les slides de la séance 1 >

Quelques remarques supplémentaires:

(i) Théorème de la divergence : $\forall \vec{n}(x, y, z)$ champ vectoriel



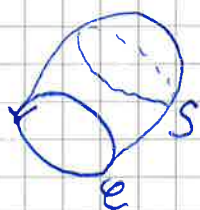
$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{n} dV = \oint_S \vec{n} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Si } V \rightarrow 0 \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{n} dV = V (\vec{\nabla} \cdot \vec{n}) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \approx \frac{1}{V} \oint_S \vec{n} \cdot d\vec{S}$$



$\vec{\nabla} \cdot \vec{n} \neq 0 \Rightarrow$ le champ "diverge" autour du point considéré.

(ii) Théorème du rotationnel



$$\oint_C \vec{n} \cdot d\vec{\ell} = \oint_S \vec{\nabla} \times \vec{n} \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } C \text{ et } S \rightarrow 0 \quad \oint_S \vec{\nabla} \times \vec{n} \cdot d\vec{S} &\approx S \vec{\nabla} \times \vec{n} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{n} &= \frac{1}{S} \oint_C \vec{n} \cdot d\vec{\ell} \end{aligned}$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE



$\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0 \Rightarrow$ le champ "tourbillonne" autour du point considéré

II) Théorie du champ électromagnétique

a. Principes fondamentaux

i) C1 - Equations de Maxwell

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$	Maxwell - Gauss
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Loi de flux magnétique
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Maxwell - Faraday
$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	Maxwell - Ampère

avec
 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$
 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
 dans le vide

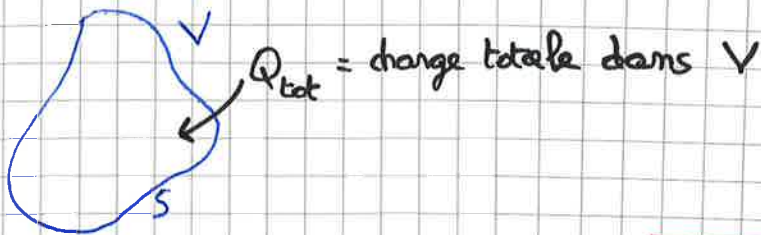
terme dû à Maxwell

C2 - Quantités impliquées

champs	$\vec{E}$	champ électrique	V/m	
	$\vec{H}$	champ magnétique	A/m	
	$\vec{D}$	densité de flux électrique	C/m ²	unité de charge électrique
	$\vec{B}$	densité de flux magnétique	Wb/m ²	unité de charge magnétique (Weber)
sources	$\vec{j}$	densité volumique de courant	A/m ²	
	ρ	densité volumique de charges	C/m ³	

Rq: $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} E_x(x, y, z, t) \\ E_y(x, y, z, t) \\ E_z(x, y, z, t) \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right)$

C3 Densités de charges et de courant



$\rho(\vec{r})$ est la fonction définie par

$$Q_{\text{tot}} = \int_V \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

densité vol.
de charges:
vaut q_i
quand $\vec{r} = \vec{r}_i$
et 0 sinon

avec

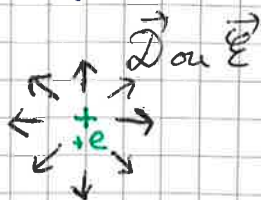
$$\vec{j} = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad [A/m^2]$$

$$\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = I_{\text{tot}} \quad [A]$$

densité volumique de courant:
permet de calculer le courant
total à travers une surface

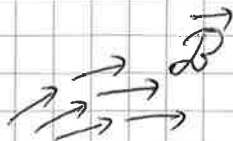
C4 - Interprétation physique

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$



$\vec{E}$ "diverge" au niveau
des charges (Loi de Coulomb)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$



$\vec{B}$ ne "diverge" jamais (inexistence
de charges magnétiques)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



$\vec{E}$ tourbillonne autour d'un champ
 $\vec{B}$ qui varie (Effet de Faraday)



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



$\vec{H}$ tourbillonne autour d'un courant $\vec{j}$ (Ampère-Biot-Savart)
ET/OU

d'un champ $\vec{D}$ qui varie
(courant de déplacement de Maxwell)

C5 - Cinquième postulat

Force de Lorentz

$$\vec{F}_{EM} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) = \vec{F}_E + \vec{F}_M$$

ppté de l'espace

↓
propriété de la matière

↓
ne dépend pas de $\vec{v}$
→ électrique

↓
dépend de $\vec{v}$
→ magnétique

C6 - Conservation de la charge

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \Rightarrow 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{D}}_q)$$

car $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0 \quad \forall \vec{u}$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \frac{\partial Q_T}{\partial t}$$

Q_T = charge totale dans V

$$\Rightarrow \frac{\partial Q_T}{\partial t} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV = - \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = - I_S$$

↓
variation de Q_T

↓
courant entrant dans V

forme intégrale de la conservation de la charge

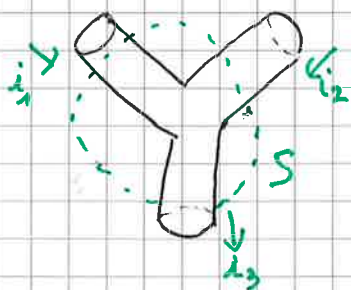


ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Rq: forme différentielle de la conservation de la charge:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

C7 - Exemple Loi de Kirchhoff = hypothèse faite en théorie des circuits que les fils ne peuvent pas accumuler de charges.



$$\frac{\partial Q_T}{\partial t} = 0 = i_3 - i_1 - i_2$$

loi des
nœuds
de Kirchhoff

(ii) Champs monochromatiques

C8 - Phaseurs complexes

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}(x, y, z) e^{j\omega t} \right\}$$

↑ champ réel
↑ phaseur
f = $\omega/2\pi$ fréquence

idem pour $(\vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{J}, \rho) \rightarrow (\vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{J}, \rho)$

ex: $\vec{H}(\vec{r}, t) = 2 \cos(\omega t + 3z) \hat{x} + 4 \sin(\omega t + 3z + \frac{\pi}{4}) \hat{y}$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}, t) = 2 \text{Re} \left\{ e^{j3z} e^{j\omega t} \right\} \hat{x} + 4 \text{Re} \left\{ e^{j3z} e^{-j\pi/4} e^{j\omega t} \right\} \hat{y}$$

$\cos(\omega t + 3z + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = 2 e^{j3z} \hat{x} + 4 e^{j(3z - \pi/4)} \hat{y}$$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

C9 - Eq. de Maxwell complexes

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times [\text{Re}\{\vec{E}e^{j\omega t}\}] = -\frac{\partial}{\partial t} [\text{Re}\{\vec{B}e^{j\omega t}\}]$$

$$\Rightarrow \text{Re}\{(\vec{\nabla} \times \vec{E})e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{-\vec{B} \frac{\partial}{\partial t}(e^{j\omega t})\}$$

$$\Rightarrow \text{Re}\{(\vec{\nabla} \times \vec{E})e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{e^{j\omega t} j\omega \vec{B}\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -j\omega \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + j\omega \vec{D} \end{aligned}} \quad \text{reel} \leftrightarrow \text{phaseur} \quad \vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$$

C10 - Exemple: onde plane monochromatique

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \hat{y} E_0 \cos(\omega t - \beta z) \Rightarrow \vec{E} = E_0 \hat{y} e^{-j\beta z}$$

↓
nombre
d'onde

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{pulsation fréquentielle}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{longueur d'onde}$$

